Title	球面天文學要綱(5) (年末研究特集號)
Author(s)	ニウカム
Citation	天界 = The heavens (1943), 23(269): 25-32
Issue Date	1943-12-28
URL	http://hdl.handle.net/2433/168676
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

23. 算術平均と，殘餘の二乘の和と． まづ吾々は一定量 x を反復測定する最も簡單な場合を考へることとし，n 回の測定の個々の結果として，x_1，x_2，x_3……x_n といふ値を獲たと假定する．さうすると，つまり

$$x = x_1, \qquad x = x_2, \qquad x = x_3 \cdots\cdots\cdots\cdots x = x_n$$

といふ式や，又は

$$x - x_1 = 0, \qquad x - x_2 = 0, \qquad x - x_3 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots x - x_n = 0 \qquad (1)$$

といふ式を得たわけだから，そこで，問題は，これ等の式から，如何にして x の最良の値を求めるかといふことにある．

ついては，まづ x を不可決定の量と考へ，或る假定の下に，この x に任意の値を與へ，それと，各測定値との差を r_1，r_2，r_3，……r_n と書いて見ると，

$$x - x_1 = r_1 \qquad x - x_2 = r_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x - x_n = r_n \qquad (2)$$

次ぎに，これらの差の二乘の和を Ω とすれば，

$$\Omega = r_1^2 + r_2^2 + \cdots\cdots + r_n^2$$
$$= nx^2 - 2(x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n)x + x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2$$

これは x の二乘の方程式であるが，初め"任意"として置いた x に對して，今茲で或る制約を加へ，即ち，Ω が出來るだけ最小値となるやうに x を定める．これがためには，Ω を x について微分して，其の結果を 0 と置く：

$$\frac{d\Omega}{dx} = 2nx - 2(x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n) = 0$$

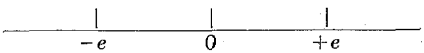
故に，

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n}{n} \qquad (3)$$

即ち，"これ等の測定値の最も良さそうな値は，個々の測定値の平均である"といふのが，この問題解決の原則である．

24. 公算誤差． 元來，すべて天文の觀測は誤差を伴ふものなのだから，その觀測の信用について何等かの表現が必要となる．これがために，まづ茲に e といふ量を考へ，觀測の場合に起る誤差が，e よりも大きくなるか，小さくなるかといふチャンスを研究する．若し此のチャンスが大小五分々々である場合には，この e を公算誤差 (Probable error) と呼ぶ．

x に對する測定値 x_1 が，公算誤差 e を有つといふ判斷（即ち，x の眞の値が，x_1 に比べて，e だけ違つてゐるといふ判斷）は　$x = x_1 \pm e$　といふ形で言ひ表はす．即ち，これは，例へば，4回の測定のうち，x が $x_1 - e$ と $x_1 + e$ との限界以内にある場合が2回，又，その限界以外にある場合が2回あることの意味である．從つて，横軸線の上に，x の値をグラフとして表はし，公算誤差の値を其の兩側に取れば，



即ち，0 點は採用された x の値を表はし，$+e$ と $-e$ とは其の兩側に現はれ

る．さうすると，x の値が起る4つの場合（チャンス）は

$$\left.\begin{array}{l} -e \text{ の左側} \\ -e \text{ と } 0 \text{ との間} \\ 0 \text{ と } +e \text{ との間} \\ +e \text{ の右側} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

で，これが皆相等しいのである．

この全理論に於いて，下記の5問題が最も基本的なものである；

第1問題　x の公算誤差を $\pm e$ とした場合，mx の公算誤差を求む．但し m は恒數である．

若しも，x が $x-e$ と $x+e$ との間にあるならば，mx は $mx-me$ と $mx+me$ との間にある筈である．故に，mx が此の範圍内に含まれるチャンスは，x が $x-e$ と $x+e$ との間に含まれるチャンスと同じである．從つて，

$$mx \text{ の公算誤差 } = \pm me \qquad (5)$$

この定理は，m が1より大きくても，小さくても，成立する．

定義　獨立値 (Independent value) とは，その一つの採用數値が，他の數値の判斷に影響しない場合を云ふ．

第2問題　與へられた若干の獨立値 $q_1,\ q_2 \cdots\cdots q_n$ の公算誤差を，それぞれ $e_1,\ e_2 \cdots\cdots e_n$ とした場合，其の和の公算誤差を求む．まづ下の如く定める：

$q_i' = q_i$ の眞の（未知の）値．　但し，$i = 1,\ 2, \cdots\cdots$ n.

$Q = q_1 + q_2 + \cdots\cdots + q_n =$ 與へられたもの．

$Q' = q_1' + q_2' + \cdots\cdots + q_n' =$ 眞の（未知の）和．

さうすると，

$$q_1' - q_1 = \pm e_1 \qquad q_2' - q_2 = \pm e_2 \cdots\cdots\cdots\cdots q_n' - q_n = \pm e_n$$

即ち，この各式に於いて，左邊の絕對値が e よりも大きいか，小さいかは，五分々々である．そこで，これらの總ての式の和をとれば，

$$Q' - Q = \pm e_1 \pm e_2 \pm \cdots\cdots \pm e_n$$

これを2乘すると，

$$(Q' - Q)^2 = e_1^2 + e_2^2 + \cdots\cdots + e_n^2 \left\{ \pm e_1 e_2 \pm e_1 e_3 \pm \cdots\cdots \pm e_{n-1} e_n \right\}$$

しかるに，e は正負共に同じチャンスであるから，この式の右邊の｛｝內の各項の和は，正負共に同じチャンスであつて，從つて，この和の公算平均値は 0 となり，式の右邊の最も公算的な値は $e_1^2 + e_2^2 + \cdots\cdots + e_n^2$ となる．故に，$Q'-Q$ の最も公算的な値としては，

$$E = Q' - Q = \sqrt{(e_1^2 + e_2^2 + \cdots\cdots + e_n^2)} \qquad (6)$$

（但し，E は和 Q の公算誤差である．）故に，下記の定理を得る：

獨立値の任意數の和の公算誤差は，個々の數値の公算誤差の二乘の和の平方

根に等し．

第1問題と第2問題の結論に違ひがあるやうに見えるのは，第2の場合の數値が各々獨立してゐるといふ前提から起るのである．

第3問題　若干の獨立値から成る一次函數の公算誤差を，個々の數値の公算誤差で言ひ表はすこと．

個々の數値と，その公算誤差とを，下の如く定める．

$$x_1 \pm e_1, \quad x_2 \pm e_2, \ x_3 \pm e_3 \cdots\cdots\cdots$$

そして，一次の函數を

$$X = ax_1 + bx_2 + cx_3 \cdots\cdots\cdots$$

とすれば，第1問題により，

$$\begin{aligned} ax_1 \ \text{の公算誤差} &= \pm ae_1 \\ bx_2 \quad 〃 \quad 〃 &= \pm be_2 \\ cx_3 \quad 〃 \quad 〃 &= \pm cx_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots \end{aligned}$$

又，第2問題より，

$$X \ \text{の公算誤差} = \sqrt{(a^2 e_1^2 + b^2 e_2^2 + c^2 e_3^2 + \cdots\cdots)} \qquad (7)$$

これが，求むる結果である．

第4問題　皆同じ公算誤差を有つ若干の獨立値の算術平均値の公算誤差を求むること．

m 個の數値 x_1，$x_2 \cdots\cdots\cdots x_m$ の算術平均は

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_m}{m} = \frac{x_1}{m} + \frac{x_2}{m} + \cdots\cdots + \frac{x_m}{m}$$

といふ一次方程式であるから，第3問題に於いて

$$a = b = c = \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{m}, \qquad e_1 = e_2 = e_3 = \cdots\cdots\cdots = e$$

と置けば，(7) により

$$\text{公算誤差} = \sqrt{\frac{me^2}{m^2}} = \frac{e}{\sqrt{m}} \qquad (8)$$

故に，同一數値の若干の觀測の平均結果の公算誤差は其の回數の平方根に逆比する．

25. 重みを附けた平均値　多數の結果の算術平均は，その結果の一つづつに特に輕重の區別を附ける理由の無い場合の，最も公算的な値であるが，しかし，若しも其のうちの或る結果が他のものよりも小さい公算誤差を有つてゐる場合には，最後の結論を得るため，かういふ値を特に重要視すべきものであることは明らかである．――この場合，如何にして最小二乘法の原理を改めるべきかを知るために，まづ，今，與へられた結果を x_1，$x_2 \cdots\cdots x_n$ とし，これらを皆

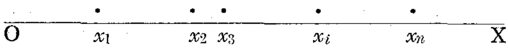
個々別々の結果と考へずに，この各々がそれぞれ同じものの幾つかの平均値であると考へるとすると，即ち，

x_1 を m_1 個の觀測の平均値
x_2 を m_2 〃　〃　〃
………………………………
x_n を m_n 〃　〃　〃

さて，吾々が採るべきは，元の結果の平均値なのであるが，これらの和を作るため，x_1 は m_1 個の數値の平均である故に，これらの和は m_1x_1 でなければならぬ．故に，m_1x_1，m_2x_2……等の總ての積の和が，元の結果の總和となり，その觀測の總數は m_1，m_2……等の和となる．故に，求むる平均は，

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots\cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n} \tag{9}$$

この式に於いて，係數 m を "重み" (Weight) と呼び，結果を，x_1，x_2……x_n の "重みを附けた平均値" (Weighted mean) と呼ぶ．



この "重み" のある平均値の觀念は，機械的には類似がある．若し上圖の OX 軸の上に x_1，x_2……等の値を置けば，O から X までの總ての測定値の算術平均は，x_1，x_2……等が皆同じ重みを有つてゐると假定した場合の，O 點から此等の點の重心までの距離に相當する．若し此等の點が異る重みを有つてゐるとすれば，重心の位置は，つまり諸數値に重みを附けた平均値となる．

若し總ての m に皆共通の係數を乘じたならば，その結果として，m の値は共れによつて變らないことが明らかである．故に，それぞれの觀測數に比例した數を重みとして採用して宜い．言ひ換へれば，觀測數を共通の係數で乘除して，重みを求めても宜いわけである．一般に，重みは，下記の如き符號で表はされる：

$$w_1,\ w_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ w_n$$

26. 公算誤差と重みとの關係　前節の (9) 式では，x_1，x_2，x_3……の各々が依存する觀測數 m_1，m_2，m_3……が夫れぞれ重みとなつてゐるが，若し觀測數の代りに，各觀測（又は測定群）の公算誤差が與へられてゐるとすれば，求むべき最終の結果は，各觀測の回數とは關係せずに，むしろ此等の公算誤差に依存すべき筈となる．

前の第 4 問題に述べた通り，任意の回數の觀測の公算誤差は，（若し共れが各々同じ精度のものならば，）その觀測數の平方根に逆比例する．若し e_0 を一つの觀測の公算誤差とすれば，m 個の觀測の平均値の公算誤差は $e = e_0/\sqrt{m}$ であるから，

$$m = e_0^2/e^2 \tag{10}$$

この結果は(8)の逆であつて，即ち，或る一定の公算誤差を有つべき結果に對して必要な觀測の回數は，その誤差の平方に逆比することを示す，故に，若し，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots x_n$$

といふ各結果が，　$e_1,\ e_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots e_n$

といふ公算誤差を有つべきためには，先づ或る標準的な觀測の公算誤差を e_0 とし，其の重みを1とすれば，

$$w_1 = e_0^2/e_1^2,\qquad w_2 = e_0^2/e_2^2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ w_n = e_0^2/e_n^2 \tag{11}$$

が，それぞれの觀測回數であり，こうした觀測結果の平均値が，所要の公算誤差を有つこととなる．但し，こゝで，w は，整數たる必要はなく，又，2桁以上であるとか，或は1コンマ幾らと言つたやうな數で言ふことも要らない．

具體的な一例として，或る時期に於ける星の平均赤緯の秒（角）の桁を，各所の天文臺で測つた結果と，それぞれの公算誤差とを，下の如しとしやう：

$\delta =$	$3.''1$	$3.''7$	$2.''9$	$3.''2$	$3.''7$
$e =$	±0.22	±0.25	±0.18	±0.13	±0.40

便宜上，$e_0 = \pm0.''50$ を標準觀測の公算誤差と假想すれば，(9)と(11)とから

i	e_i^2	w_i	$w_i\delta_i$
	$''$		$''$
1	0.048	5	15.5
2	0.062	4	14.8
3	0.032	8	23.2
4	0.017	15	48.0
5	0.160	2	7.4
		34	108.9

$$\text{重みを附けた平均値} = 108.''9 \div 34 = 3.''20$$

第5問題　重みを附けた平均の公算誤差を求めること．

重みを附けた平均とは，或る若干回の標準觀測の平均と見て宜いわけだから，その公算誤差は(8)によつて得られる．その數とは，即ち

$$w_1 + w_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + w_n = W \tag{12}$$

故に，x の公算誤差とは

$$e = e_0/\sqrt{W} \tag{13}$$

即ち，重み1を有つ假想觀測の公算誤差を，重みの和の平方根で除したものである．

これと同樣な結果は，第3問題からも巧妙な方法で得られる．重みのある平均値は，平均を執る數量の一次函數であつて，その係數は

$$a = w_1/W,\qquad b = w_2/W,\ \text{等々}$$

であるから，これ等の a, b 等の値を(7)に入れ，又，e_1^2, e_2^2 等の値を(11)か

ら採れば,

$$e_i^2 = e_0^2/w_i$$

となる. 故に, 公算誤差は, (13) 式になつて了う.

27. 重みが皆それぞれ異なる場合に最小二乘法の原理の變形すること.

或る若干量の重みある平均値を採る場合に, 殘餘の平方の和がもはや最小にならないことは, これが重みを附けない場合と違ふことからも明らかである. 然らば, これが最小となるやうな適當な函數を求めるためには, まづ重みを附した平均値を執るべき數量を. 前記の如く x_1, x_2 …… x_n とし, 其の公算誤差を e_1, e_2, …… e_n とすれば, それぞれの重みは

$$w_1 = e_0^2/e_1^2, \qquad w_2 = e_0^2/e_2^2, \cdots\cdots\cdots w_n = e_0^2/e_n^2 \tag{14}$$

若し, (1) 又は (2) に

$$\sqrt{w_1} = e_0/e_1 \quad \sqrt{w_2} = e_0/e_2 \cdots\cdots\cdots \sqrt{w_n} = e_0/e_n \tag{15}$$

の係數を乘ずると, (5) により, 積の公算誤差 $\sqrt{w_1}x_1$, $\sqrt{w_2}x_2$,………$\sqrt{w_n}x_n$ は皆 e_0 に等しい. この乘法を (2) に應用すれば, 右邊は $\sqrt{w_1}r_1$, $\sqrt{w_2}r_2$ …… となり, これらの積の二乘の和, 卽ち,

$$w_1 r_1^2 + w_2 r_2^2 + \cdots\cdots + w_n r_n^2 = \Omega \tag{16}$$

これが最小となる筈である. 若し r_1, r_2 …… の値を (2) から採り, x について微分して, それを o と置けば,

$$w_1 (x - x_1) + w_2 (x - x_2) + \cdots\cdots = 0$$

これから, x_1, x_2 …… 等の重みを附したものの平均値として, x を得る.

28. 數量の整頓.

一群の測定値が成り立つやうな或る關係が豫め知れてゐる場合がある. 例へば, 若し水平面に於いて, O 點が種々な方向の A, B, C …… K の諸點に圍まれてゐる場合, ∠AOB, ∠BOC, ∠COD …… ∠KOA 等を測り, 最後には元の方向に歸つて來たとすれば, これらの角の和は 360° であるべきである. 若し測定に誤りが無ければ, これ等を皆加へれば, 和は精密に 360° となるべきだが, 若し此の和が 360° とならずに, Δ だけ違つてゐるとすれば, Δ は總ての測定誤差の代數和であること明らかである. そこで, 問題は, 個々の測量値に如何なる修正値の一組みを加へれば, 和が 360° になるかといふことである. これを求めるには, この要請される條件を滿たすために, 測定値を適當に加減するのであつて, 此の手續きを整頓 (Adjustment) と呼ぶ.

若し此の測定が皆同じ重みのものならば, 整頓法は次ぎの通りである. 卽ち a_1, a_2 …… a_n を各々の角度の測定値とすれば,

$$\Delta = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n - 360°$$

が誤差の和である. 故に, 最も確からしい整頓は, 總ての角へ, 公平に誤差を

分けることである．即ち

$$\delta = \varDelta/n$$

とすれば，個々の角の最後の値は

$$a_1-\delta,\quad a_2-\delta,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ a_n-\delta$$

であつて，この和は360°となり，要請された條件を滿たす．

若し重みが皆等しく無ければ，n ケの測定値

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ a_n$$

の重みを，それぞれ

$$w_1,\quad w_2,\quad w_3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ w_n$$

とし，尙，叉，修正値を

$$h_1,\quad h_2,\quad h_3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ h_n$$

とした場合に，これ等の和は

$$h_1+h_2+h_3+\cdots\cdots\cdots\cdots h_n=\varDelta \tag{17}$$

といふ條件を滿たすべきであると共に，一般原則によつて

$$\Omega = w_1h_1^2+w_2h_2^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+w_nh_n^2$$

が，出來るだけ小さくなければならぬ．故に

$$w_1h_1dh_1+w_1h_2dh_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+w_nh_ndh_n=0 \tag{18}$$

といふ式を滿たす總ての dh が，叉，(17) を微分した式を滿たすべきであるから，

$$dh_1+dh_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+dh_n=0 \tag{19}$$

この，いろんな h の如何なる小變化に對しても，此等の式が成立しなければならぬ．これがため，まづ (19) 式に，不定係數 λ を乘じ，其の積を (18) から減じて，

$$(w_1h_1-\lambda)\,dh_1+(w_2h_2-\lambda)\,dh_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(w_nh_n-\lambda)\,dh_n=0$$

この式が，dh_1，dh_2 等の如何なる値に對しても成立するためには，

$$w_1h_1-\lambda=0,\quad w_2h_2-\lambda=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ w_nh_n-\lambda=0$$

即ち，

$$w_1h_1=w_2h_2=\cdots\cdots\cdots\cdots=w_nh_n=\lambda$$

故に

$$\left.\begin{aligned}h_1&=\lambda/w_1\\ h_2&=\lambda/w_2\\ \cdots&=\cdots\cdots\\ h_n&=y/w_n\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

此等の値の和を $-\varDelta$ に等しいと置けば，

$$\lambda=\frac{-\varDelta}{\dfrac{1}{w_1}+\dfrac{1}{w_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{w_n}} \tag{21}$$

これを (20) に入れると，整頓のための修正値 h を得る．

この場合，重みが 0 といふ測定値（即ち，測定が全く無價値といふもの）が

あると假定して，この式の形を注意して見ることは，興味があり，又，敎へられる所が多い．今，例へば，$w_1=0$ として見ると，(21) から，$\lambda=0$ となり，(20) から，$h_2=h_3=\cdots\cdots h_n=0$ となり，只 h のみは不定となる．しかし，(20) の代りに (17) を用ゐれば，$h_1=-\varDelta$ となる．即ち，かうした特殊な場合に於いては，不完全な h を決定するために，止むを得ず，他の凡ての測定値から其れを導き出すといふわけなのだが，尤も，それは前から豫期され得る，當然のことである．

第2課　公算誤差の算定

29. 公算誤差と平均誤差

上記の理論では，公算誤差といふ數値を，初めから與へられたものと假定したが，次ぎには，これに關連する種々の定義や，その算定方法等を考へる．この問題の基礎は下の通りである：

(1) 嚴密に言ふと，誤差 (Error) とは，觀測値と絕對眞正値との差であるが，絕對眞正値なるものは，決して實際に知り得ない數量だから，吾々が誤差と考へるものは，要するに，吾々が（何等かの方法で）決定し得る最良値と，個々の觀測値との違ひに外ならぬ．或る場合には之を殘餘 (Residual) とか，殘差 (Deviation) とか呼ぶが，しかし，上記の限度に置いて，普通に“誤差”と呼んでも，何の誤解も起らない．

(2) 前記の定義により，公算誤差とは，如何なる場合にも，絕對値が其れより大きい誤差と，小さいのと，等分に起り得るものとして定められる．しかし前にも述べた通り，大小等分に起り得る e を採らないで，それとは違つた公算 (Probability) を有つ誤差の値を用ゐても差し支へない理屈である．例へば，3 對 1 のチャンスが起り得る誤差を採つても宜い．この場合には，公算論の言葉を用ゐれば，“誤差が或る標準量を超過する公算が $\frac{1}{4}$ である”と言ふ．理屈は全く同じで，只，公算誤差といふ言葉の意味が變つただけである．

(3) 吾々は，公算誤差と，實際の誤差との區別を知らなければならぬ．實際の誤差とは，或る觀測列に於いて，實際に得る殘餘の數値を言ふのであるが，公算誤差とは，それ以上又は以下の公算が一定してゐる如きものを言ふ．故に實際の誤差は，公算誤差より大きいことも，小さいことも有り得るが，しかし永い間の大局から見ると，この二種の誤差は，互ひに無關係ではないのである．

(4) 平均誤差 (Mean Error) といふ言葉が，いろいろな意味に用ゐられることがあるから，誤解があつてはならぬ．一般に，幾つかの數値の“平均”とはそれ等の代數和を數で除した商であるが，若し此の意味で用ゐると，或る一群の數値と，其の平均値からの差の平均は常に 0 であつて，この言葉は意味の無いものとなる．（續く）